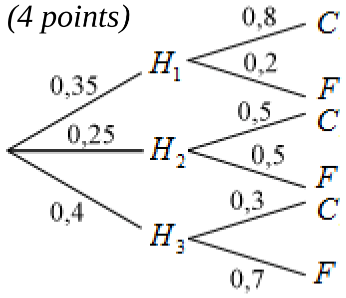
Exercice 1 : *(4 points)*

1) a)



b) $\text{P}(H_3 \cap C) = \text{P}(H_3) \times \text{P}_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.

La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 est de 0,12.

c) $\text{P}(C) = \text{P}(H_1 \cap C) + \text{P}(H_2 \cap C) + \text{P}(H_3 \cap C) = 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,28 + 0,125 + 0,12 = 0,525$.

d) $\text{P}_C(H_1) = \dfrac{\text{P}(H_1 \cap C)}{\text{P}(C)} = \dfrac{0,28}{0,525} \approx 0,533$.

L'arbre choisi étant un conifère, la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 est d'environ 0,533.

2) a) On considère l'épreuve de Bernoulli « choisir un arbre dans le stock de cette jardinerie » avec pour succès l'événement S « l'arbre est un conifère » de probabilité $p = 0,525$.

On répète 10 fois cette expérience de façons identiques et indépendantes.

X est le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli d'ordre 10 donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$.

b) $\text{P}(\text{X} = 5) = \dbinom{10}{5} \times 0,525^5 \times (1 - 0,525)^{10-5} = 252 \times 0,525^5 \times 0,475^5 \approx 0,243$.

La probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères est d'environ 0,243.

c) Si il y a au moins deux arbres feuillus alors il y a au plus huit arbres conifères.

$$\text{P}(\text{X} \le 8) = 1 - \text{P}(\text{X} = 9) - \text{P}(\text{X} = 10) = 1 - \dbinom{10}{9} \times 0,525^9 \times 0,475^1 - \dbinom{10}{10} \times 0,525^{10} \times 0,475^0$$

$$= 1 - 10 \times 0,525^9 \times 0,475^1 - 0,525^{10} \times 0,475^0 \approx 0,984.$$

La probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus est d'environ 0,984.

Exercice 2 : *(7 points)*

1) a) $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{\left(b \times \dfrac{1}{x}\right) \times x - (a + b\ln x) \times 1}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2} = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c) $f(1) = 2$ donc $\dfrac{a + b\ln 1}{1} = 2$ ce qui donne $a = 2$.

$f'(1) = 0$ donc $\dfrac{(b-a) - b\ln 1}{1^2} = 0$ ce qui donne $b - a = 0$ et donc $b = a = 2$.

2) a) $f'(x) = \dfrac{(2-2) - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{2}{x^2} \times (-\ln x)$. $\dfrac{2}{x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-\ln x$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} 2 + 2\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} (2 + 2\ln x) \times \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Or $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x} = (2 + 2\ln x) \times \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x} = 0$. Or $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2\ln x}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

avec $f(1) = \dfrac{2 + 2\ln 1}{1} = 2$.

3) a) La fonction f est strictement croissante et dérivable (donc continue) sur $]0;1]$.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $f(1)=\dfrac{2+2\ln 1}{1}=2$ donc $f\left(]0;1]\right)=]-\infty;2]$.

$1\in f\left(]0;1]\right)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction strictement monotone, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;1]$.

b) $f(5)=\dfrac{2+2\ln 5}{5}\approx 1{,}04$ et $f(6)=\dfrac{2+2\ln 6}{6}\approx 0{,}93$ donc $5<\beta<6$ et $n=5$.

4) a)

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	**0,4375**

b) Les valeurs affichées par cet algorithme sont les bornes d'un intervalle d'amplitude inférieure ou égale à 0,1 contenant α.

c)

```
Variables :          a et b sont des nombres réels.
Initialisation :     Affecter à a la valeur 5.
                     Affecter à b la valeur 6.
Traitement :         Tant que b − a > 0,1
                       | Affecter à m la valeur 1/2 (a + b).
                       | Si f(m) > 1 alors Affecter à a la valeur m.
                       | Sinon Affecter à b la valeur m.
                       | Fin de Si.
                     Fin de Tant que.
Sortie :             Afficher a.
                     Afficher a + 0,1.
```

5) a) Le rectangle OABC a une aire égale à $2\times 1=2$ u.a.
On veut partager le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales donc chacune des aires est égale à 1 u.a.
$f(x)<0$ sur $\left[0;\dfrac{1}{e}\right[$ et $0<f(x)<2$ sur $\left]\dfrac{1}{e};1\right[$ donc l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ dans le rectangle OABC est égale à $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\mathrm{dx}$ u.a.

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales si et seulement si $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\mathrm{dx}=1$.

b) $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\mathrm{dx}=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\dfrac{2}{x}+2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x\right)\mathrm{dx}=\left[2\ln x+(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=\left(2\ln 1+(\ln 1)^2\right)-\left(2\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)+\left(\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)\right)^2\right)$

$=0-\left(-2+(-1)^2\right)=0-(-1)=1$.

D'après la question 5) a) on en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

<u>Exercice 3 :</u> *(4 points)*

1) Soient A et B les points d'affixes $z_A=i$ et $z_B=-1$.

$|z-i|=|z+1|\Leftrightarrow \mathrm{AM}=\mathrm{BM}\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB]. **La proposition 1 est vraie.**

2) $1+i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4=16e^{i\frac{4\pi}{3}}=16\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8-8i\sqrt{3}$.

La proposition 2 est fausse.

3) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{FC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}+\overrightarrow{\mathrm{FC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ est normal au plan (BFG) donc $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}=0$.

Les droites (FC) et (BG) sont perpendiculaires car ce sont les diagonales d'un carré donc $\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BG}=0$.

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BG}=0+0=0$ donc les droites (EC) et (BG) sont orthogonales. **La proposition 3 est vraie.**

4) Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1+3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Le vecteur $\vec{n}(1;1;3)$ est un vecteur normal au plan (P) et un vecteur directeur de la droite d donc la droite d est perpendiculaire au plan P.

Le point de d de paramètre $t=-1$ est le point de coordonnées $(1;-2;-2)$ donc S appartient à la droite d.

La droite d est donc la droite passant par le point S et perpendiculaire au plan P. **La proposition 4 est vraie.**

Exercice 4 Obligatoire : *(5 points)*

1) a) $u_1=\frac{2}{3}u_0+\frac{1}{3}\times 0+1=\frac{2}{3}\times 2+1=\frac{7}{3}\approx 2,33$. $u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}\times 1+1=\frac{2}{3}\times\frac{7}{3}+\frac{1}{3}+1=\frac{26}{9}\approx 2,89$.

$u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{1}{3}\times 2+1=\frac{2}{3}\times\frac{26}{9}+\frac{2}{3}+1=\frac{97}{27}\approx 3,59$ $u_4=\frac{2}{3}u_3+\frac{1}{3}\times 3+1=\frac{2}{3}\times\frac{97}{27}+\frac{3}{3}+1=\frac{356}{81}\approx 4,40$.

b) La suite semble croissante.

2) a) Pour $n\in\mathbb{N}$, notons P_n la proposition "$u_n\leq n+3$".

Initialisation : pour $n=0$

$u_0=2$ et $0+3=3$ donc $u_0\leq 0+3$. P_0 est vraie.

Hérédité : pour $n\geq 0$

Supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n\leq n+3$, et montrons alors que P_{n+1} est vraie.

$u_n\leq n+3$ donc $\frac{2}{3}u_n\leq\frac{2(n+3)}{3}$ ce qui donne $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\leq\frac{2(n+3)}{3}+\frac{1}{3}n+1$.

Or $\frac{2(n+3)}{3}+\frac{1}{3}n+1=\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}n+2+1=n+3$ et $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$ donc $u_{n+1}\leq n+3\leq(n+1)+3$. P_{n+1} est vraie.

On a montré que pour $n\geq 0$, P_n vraie implique P_{n+1} vraie.

Conclusion : pour tout $n\geq 0$, $u_n\leq n+3$.

b) $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=\frac{1}{3}n+1-\frac{1}{3}u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$.

c) $u_n\leq n+3$ donc $n+3-u_n\geq 0$ ce qui donne $u_{n+1}-u_n\geq 0$. La suite (u_n) est croissante.

3) a) $v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-(n+1)=\frac{2}{3}(v_n+n)+\frac{1}{3}n+1-(n+1)=\frac{2}{3}v_n+\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}n+1-(n+1)=\frac{2}{3}v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) $v_0=u_0-0=2-0=2$ donc $v_n=v_0\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$. On en déduit que $u_n=v_n+n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ car $-1<\frac{2}{3}<1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

4) a) $S_n=\sum_{k=0}^{n}2\left(\frac{2}{3}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}k=2\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)+\frac{n(n+1)}{2}=2\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right)+\frac{n(n+1)}{2}=6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$.

b) $T_n=\frac{1}{n^2}\left(6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{1}{n^2}\times 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{n^2}\times 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{1+\frac{1}{n}}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=6$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\times 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=0$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{2}$.

Exercice 4 Spécialité : *(5 points)*

1) $v_{n+1}=0,95v_n+0,01c_n$ et $c_{n+1}=0,05v_n+0,99c_n$.

2) $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\mathrm{Y}=\mathrm{AX}=\begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,95a+0,01b \\ 0,05a+0,99b \end{pmatrix}$ donc $c=0,95a+0,01b$ et $d=0,05a+0,99b$.

3) a) $\mathrm{PQ}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+(-1)\times(-5) & 1\times1+(-1)\times1 \\ 1\times5+1\times(-5) & 1\times5+1\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$\mathrm{QP}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+1\times5 & 1\times(-1)+1\times1 \\ 1\times(-5)+1\times5 & (-1)\times(-5)+1\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

P est donc inversible et $\mathrm{P}^{-1}=\frac{1}{6}\mathrm{Q}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -0,94 \\ 5 & 0,94 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ est la matrice diagonale $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}$.

c) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons P_n la proposition " $\mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ ".

Initialisation : pour $n=1$

$\mathrm{PD}^1\mathrm{P}^{-1}=\mathrm{P}\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\right)\mathrm{P}^{-1}=\mathrm{PP}^{-1}\mathrm{APP}^{-1}=\mathrm{A}$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : pour $n\geq1$

Supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire que $\mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$, et montrons alors que P_{n+1} est vraie.

$\mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ et $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$ donc $\mathrm{A}^{n+1}=\mathrm{A}\times\mathrm{A}^n=\mathrm{PDP}^{-1}\times\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}=\mathrm{PD}\times\mathrm{D}^n\mathrm{P}^{-1}=\mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$. P_{n+1} est vraie.

On a montré que pour $n\geq1, P_n$ vraie implique P_{n+1} vraie.

Conclusion : pour tout $n\geq1$, $\mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}0,94^n=0$ car $-1<0,94<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{6}\times1\times v_0+\frac{1}{6}\times1\times c_0=\frac{1}{6}\left(v_0+c_0\right)=\frac{1}{6}\times250000=\frac{125000}{3}$.

A long terme la population en ville va tendre vers $\frac{125000}{3}\approx41667$ habitants (c'est-à-dire $\frac{1}{6}$ de la population de cette région) et la population à la campagne va tendre vers $250000-\frac{125000}{3}=\frac{625000}{3}\approx208333$ habitants (c'est-à-dire $\frac{5}{6}$ de la population de cette région).